Corrigé du Contrôle continu

Exercice 1

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0,1[$.

Donc la borne impropre de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ est 1.

Pour tout $a \in [0,1[$, on a ;

$$\lim_{a \to 1^<} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{a \to 1^<} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^a$$

$$= \lim_{a \to 1^<} 2\cancel{\sqrt{}}\,1-a$$

$$\lim_{a \to 1^<} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2$$

Par suite l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge et on a $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2$.

Exercice 2 :

Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Donc les bornes impropres sont 0 et $+\infty$;

Considérons les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$

[redacted]

• Pour $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$.

Pour tout $x>0$, on a $\displaystyle\left|\frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\right| \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$

D'autre part $\displaystyle\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}\,dx$ converge. Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$ converge.

• Pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$.

, on a $\displaystyle\frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x^2\ln(1+x)}$

$$\frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)}.$$

D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\frac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(1+x)} = 0$

et $\frac{3}{2}>1$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)}\,dx$ converge.

Par conséquent, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$ converge.

Conclusion : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$ converge.

[redacted]

<u>Exercice 3</u> : Convergence de $\int_0^{+\infty}\left(1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)dx$.

La fonction $f : x \longmapsto 1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les bornes impropres sont 0 et $+\infty$.

Considérons les intégrales $\int_0^1\left(1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)dx$ et

$$\int_1^{+\infty}\left(1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)dx.$$

- Pour $\int_0^1\left(1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)dx$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1+x\ln(x)-x\ln(1+x)\right) = \underline{1}$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0, d'où $\int_0^1\left(1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)dx$ converge.

- Pour $\int_1^{+\infty}\left(1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)dx$.

Pour $x>1$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= 1-x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= 1-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $f(x)\sim\frac{1}{2x}$. D'autre part $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ diverge.

donc $\int_1^{+\infty}\left(1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)dx$ diverge.

Conclusion : L'intégrale $\int_0^{+\infty}\left(1+x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)dx$ diverge.

[redacted]

Exercice 4 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudions la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$.

$f : x \longmapsto \dfrac{x - \sin(x)}{x^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc les bornes impropres sont 0 et $+\infty$.

Considérons $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$.

- Pour $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$:

On a
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\frac{x - \sin(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{6x^{\alpha-3}} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha-3}}\right)$$

Comme $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^{\alpha-3}}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha - 3 < 1$ si et seulement si $\alpha < 4$, donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha < 4$.

- Pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$:

Pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - \dfrac{\sin(x)}{x^\alpha}$

On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ donc si et seulement si $\alpha > 2$.

D'autre part d'après le lemme d'Abel $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ converge pour $\alpha > 0$.

Par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$ converge si et seulement si $2 < \alpha < 4$.

[redacted]

Complément : Pour $\alpha \leq 0$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/2} \frac{x - \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$.

Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha}\, dx$ converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(2n\pi)^{-\alpha}\left[(2n\pi) - \sin x\right] \leq \frac{x - \sin x}{x^\alpha} \leq \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-\alpha}\left[2n\pi + \frac{\pi}{2} - \sin x\right]$$

$$(2n\pi)^{-\alpha}\left[\frac{\pi}{2}(2n\pi) - 1\right] \leq I_n \leq \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-\alpha}\left[\frac{\pi}{2}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$

Par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha}\, dx$ diverge.

[redacted]